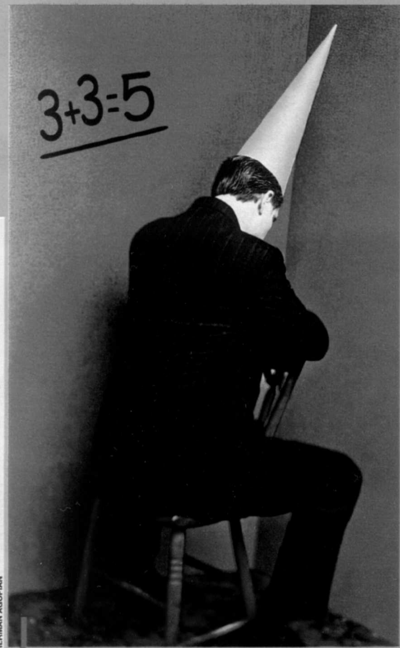
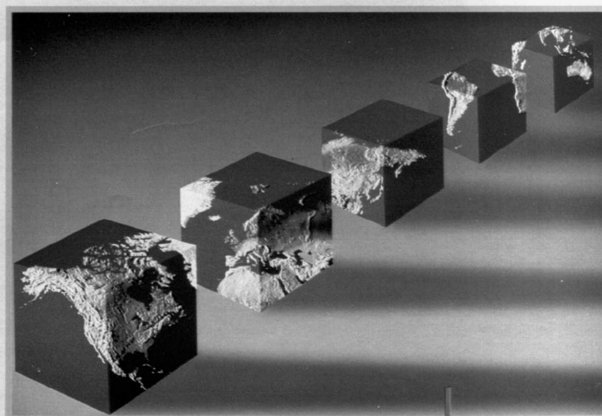
Maravillas y secretos de LAS MATEMÁTICAS

La informática, la geometría, las ciencias de la naturaleza y las sociales se valen del instrumento básico de pensamiento que son las matemáticas. Este año 2000 está dedicado mundialmente a su difusión, comprensión y también a su disfrute. ● **Por Miguel Ángel Sabadell** ●

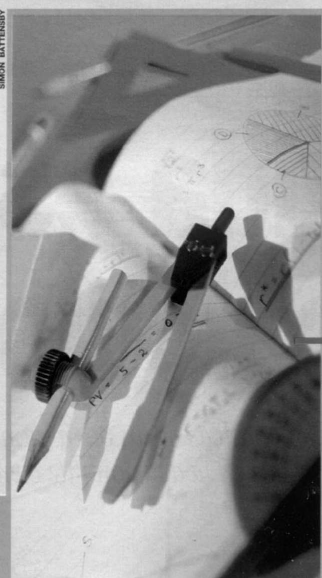


HERMAN AGOPIAN

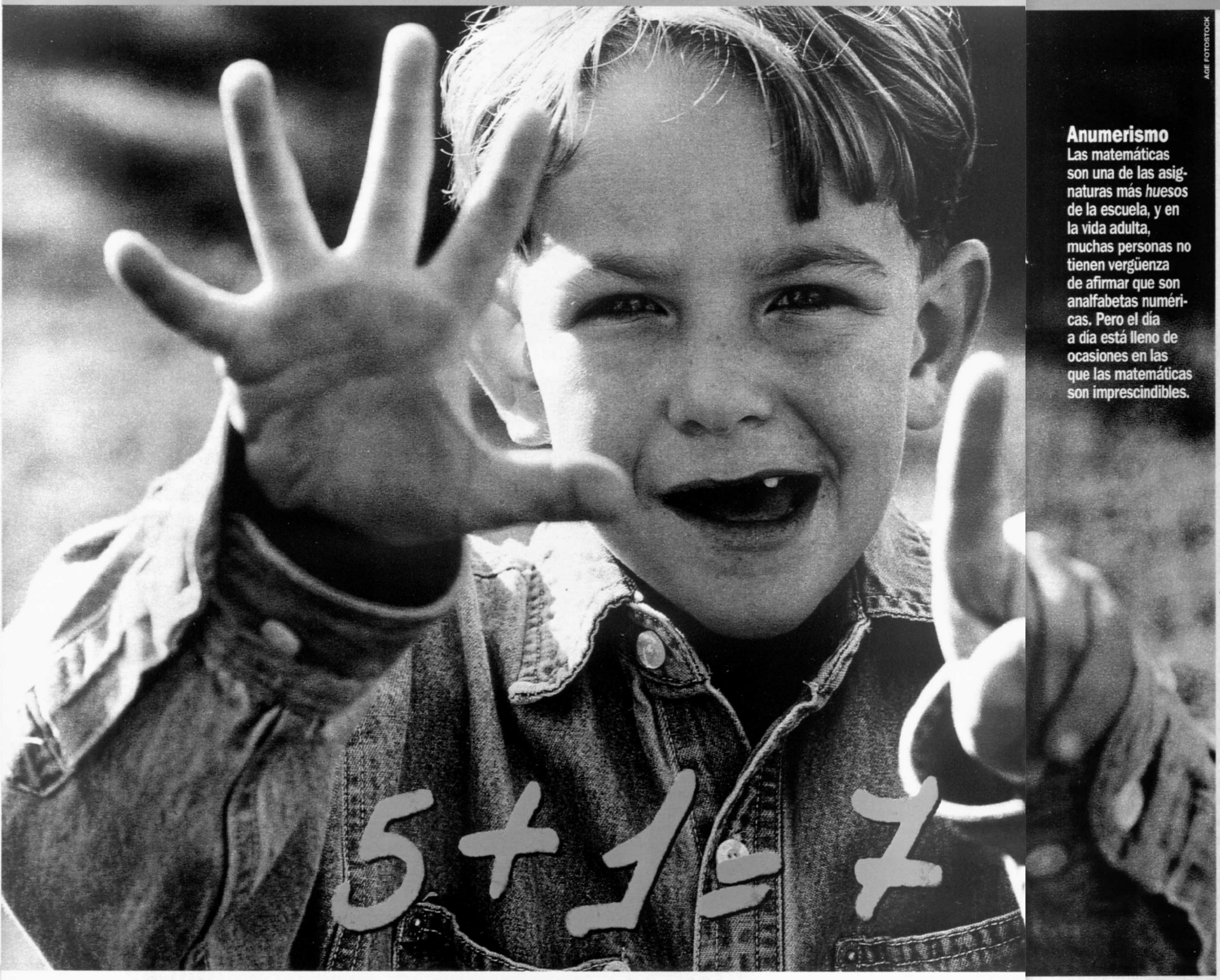


MIKE AGLIOLO

AGE FOTOSTOCK



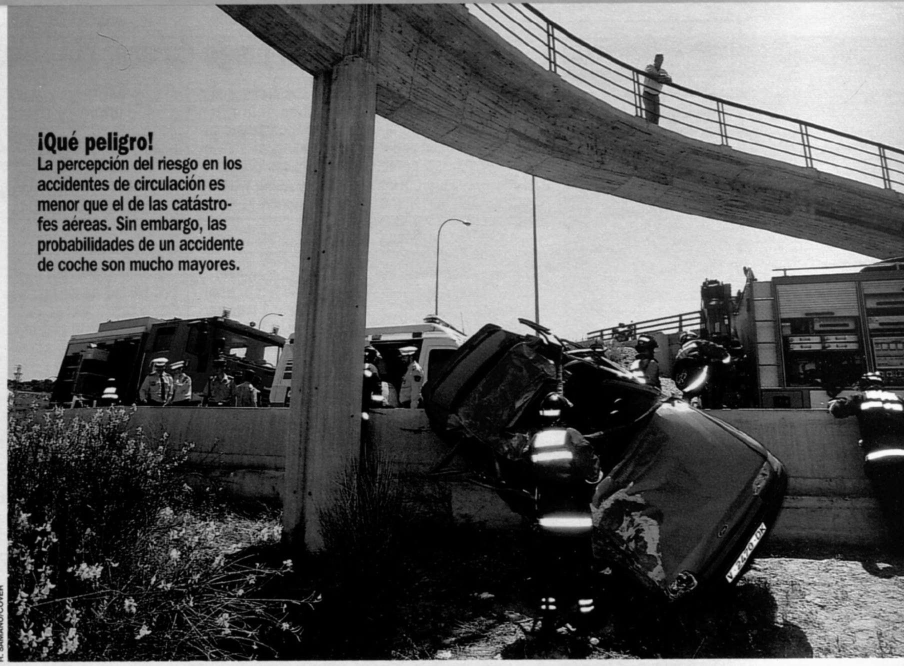
SIMON BATTENSBY



Anumerismo
Las matemáticas son una de las asignaturas más *huesos* de la escuela, y en la vida adulta, muchas personas no tienen vergüenza de afirmar que son analfabetas numéricas. Pero el día a día está lleno de ocasiones en las que las matemáticas son imprescindibles.

R. SÁMANO/COVER

AGE FOTOSTOCK



¡Qué peligro!
La percepción del riesgo en los accidentes de circulación es menor que el de las catástrofes aéreas. Sin embargo, las probabilidades de un accidente de coche son mucho mayores.

AGE FOTOSTOCK

Guerra de cifras en las manifestaciones
Cuando se trata de difundir cuántas personas acuden a una manifestación o las bajas de una batalla, los trucos matemáticos permiten manejar las cifras en interés propio.

La vida está llena de cálculos erróneos

Este Año de las Matemáticas es un buen momento para tratar de salir del analfabetismo numérico, y adentrarse en la apasionante ciencia que rige tantos actos cotidianos.

Las matemáticas nunca fueron mi fuerte", "en la escuela, odiaba las cuentas", "no me hables de números, yo soy de letras". Frases como éstas las podemos escuchar prácticamente todos los días. A veces nuestro interlocutor llega a vanagloriarse de que no tiene ni idea de matemáticas y que le basta con sumar y restar. Este comportamiento forma parte de cierta corriente social donde está bien visto declararse analfabeto en cualquier cuestión relacionada con las ciencias. Algo sorprendente, pues a nadie se le ocurriría sentirse orgulloso de no saber quién era Cervantes. Las consecuencias del anumerismo matemático son graves, ya que la vida cotidiana está repleta de situaciones en las que su conocimiento elemental resulta básico para tomar una decisión adecuada.

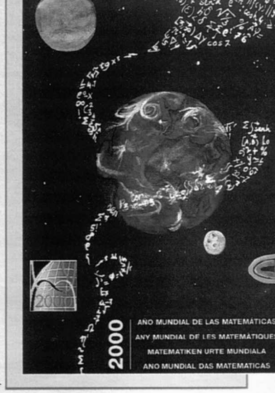
● Jugar al rojo y negro

Esto es especialmente exagerado en nuestra percepción de la probabilidad. Un ejemplo lo tenemos en la llamada *falacia del jugador*. Supongamos que en la ruleta de un casino ha salido seis veces seguidas el color rojo. Los jugadores suelen pensar que en la partida siguiente hay más posibilidades de que salga negro, cuando en realidad hay la misma que antes, un 50 por 100. Es lo mismo que si lanzamos una moneda al aire: en cada lanzamiento la probabilidad de sacar cruz es la misma que la de sacar cara, independientemente de lo que haya pasado en el anterior.

Esta ceguera ante las probabilidades es aún más marcada cuando queremos analizar situaciones de riesgo. Sabemos distinguir entre lo que no comporta ningún peligro y lo que sí lo tiene. Sin embargo, somos incapaces de diferenciar entre un acto que tenga, por ejemplo, una posibilidad entre 10.000 de suceder y otro que tenga una entre 100. De hecho, lo que nos preocupa no →

El Año de las Matemáticas

La UNESCO ha declarado el 2000 Año de las Matemáticas, apoyando la iniciativa de la Unión Matemática Internacional. Se van a celebrar actos en diferentes ciudades del mundo para difundir que la educación matemática juega un papel decisivo en la formación del ser humano, porque son el lenguaje de la ciencia y las principales portadoras del pensamiento racional. La información sobre este Año se obtiene en Internet: http://dulcinea.uc3m.es/ceamm y http://wmy2000.mathjussieu.fr/. ●



En los dados, las probabilidades matemáticas de sacar un número concreto son 1 de cada 6. Para que el premio fuera justo debería tener la misma proporción.

STOCK PHOTOS

¿Cuál es el juego de azar más justo?

Me han tocado 1.000 millones a la lotería! ¿Quién no ha soñado alguna vez con poder decir una frase como ésa? La tentación de hacerse multimillonario de la noche a la mañana es en lo que se basan los juegos de azar. Todo el mundo sabe que es bastante difícil, pero jugamos por si suena la flauta por casualidad.

Sin embargo, muy pocas veces nos hemos preguntado si los juegos de azar, como la famosa ruleta o la bonoloto, son equitativos. Lo primero: ¿qué quiere decir equitativo? Los premios son equitativos si la razón entre la apuesta y la ganancia es igual a la razón entre las probabilidades de ganar y las de perder. Tomemos el caso de los dados. Imaginemos que ganamos si sacamos un 3. De cada 6 tiradas que hagamos, tendremos 1 oportunidad de ganar y 5 de perder. Entonces la apuesta sería equitativa si el premio por acertar fuera 5 veces lo apostado.

Teniéndolo en cuenta, ¿son equitativos los juegos de azar? Como cualquiera puede prever, no lo son. Pero algunos son más equitativos que otros. El premio a la equidad se lo lleva la ruleta. Si apostamos a un solo número del 1 al 36 y acertamos, nos pagarán una cantidad 35 veces mayor que la de la apuesta. De 36 vueltas en la ruleta tenemos una posibilidad de acertar y 35 de perder y el premio va en la misma proporción. Pero nos hemos olvidado del cero; si sale, la banca se lleva todo lo que hay sobre la mesa. Puede parecer que la ventaja del casino es muy pequeña, pero no es así. Con esta pequeña ruptura de las leyes de la equidad, la banca tiene asegurada, a la larga, casi el 3 por 100 de todo el dinero que pasa por la mesa de juego. A pesar de todo, la ruleta es uno de los juegos de casino más equitativos, ya que los apostantes juegan con un 51,4 por 100 en contra y un 48,6 por 100 a favor.

En la lotería primitiva se trata de acertar 6 números de un total de 49. En este caso, la probabilidad de acertar es bajísima, pues hay casi 14 millones de combinaciones de números posibles. Para que fuera un juego equitativo, y ya que la apuesta cuesta 100 ptas, el pleno debería estar recompensado con 1.400 millones de pesetas como mínimo.

La lotería primitiva es uno de los juegos de azar más difíciles que existe ya que las probabilidades de acertar son mínimas.

Algunos sueños probablemente se cumplen

El contenido de los sueños siempre nos ha fascinado y siempre hemos querido ver en ellos resonancias de lo que ha ocurrido o presagios de lo que va a pasar. No es difícil encontrar a amigos o conocidos que nos cuentan que soñaron una situación y que al poco tiempo, sucedió. Querer ver este tipo de sueños como verdaderamente premonitorios parte de la base de que es prácticamente imposible soñar algo y que después suceda. Pero esto no es cierto. Lo primero que debemos definir es cuándo consideramos que un sueño es profético. Pongamos el caso de que sea cuando unos cuantos detalles del sueño coincidan con lo que suceda a los pocos días. Pues bien, supongamos que, por casualidad, 1 de cada 10.000 sueños se pueda considerar premonitorio (una probabilidad realmente baja). Esto quiere decir que la probabilidad de que una noche no tengamos un sueño premonitorio es, suponiendo que sólo soñemos una vez por noche, 9.999/10.000. Si lo calculamos para 2 noches seguidas es 9.999/10.000 por 9.999/10.000. De este modo, a lo largo de un año el número de sueños fallidos es de $(9.999/10.000)^{365}$, que da, aproximadamente, 0,964. Esto quiere decir que durante un año el 96,4 por 100 de la gente que sueña todas las noches tendrá sueños fallidos. Pero lo importante es que aproximadamente el 3,6 por 100 de la gente que sueña todas las noches tendrá por lo menos un sueño profético durante este mismo período. Un 3,6 por 100 puede parecer una cantidad muy pequeña, pero no lo es tanto si la traducimos a un número de personas. Si en España hay del orden de 20 millones de personas que sueñan todas las noches, más de 700.000 tendrán sueños proféticos aparentes cada año.

ARCHIVO MUY

es si el riesgo es alto o bajo, sino que exista. Mientras desechamos realizar algunos actos porque comportan cierto peligro, asumimos otros donde éste es mayor. Un ejemplo está en los siniestros aéreos: algunas personas no quieren volar por el temor a que se caiga el avión, pero eso no les impide coger el coche, cuando la probabilidad de morir en accidente de circulación es mucho mayor. Intentan justificarse diciendo: "bueno pero si te toca, te toca", como si eso no sucediese con los coches.

Estos ejemplos nos demuestran que el ser humano no es muy bueno calculando probabilidades de manera intuitiva. Nuestro cerebro tiene la manía de hacernos creer que es muy probable que un acontecimiento ocurra cuanto más fácil nos resulte imaginarlo mentalmente y cuanto más nos impresione emotivamente.

Cuidado con lo ajeno

Un ejemplo es la tendencia a disminuir la velocidad después de ver un accidente de tráfico. ¿Acaso por ver un siniestro aumenta la probabilidad de sufrir otro? ¿Por qué tenemos más cuidado del habitual con nuestra casa después de que hayan robado en la vivienda de un amigo, aunque haya sido en otra ciudad? Moraleja: las frecuencias estadísticas de los acontecimientos son una cosa, y otra muy distinta la facilidad con que nuestro cerebro imagina ciertas situaciones como más frecuentes, sobre todo si

Biorritmos analfabetos

Una de las historias más absurdas de la larga historia de los números es la protagonizada por un cirujano berlinés de nombre Wilhelm Fliess. Era un hombre obsesionado con los números 23 y 28. Estaba convencido de que detrás de todo proceso biológico e incluso en el mundo inorgánico, había dos ciclos fundamentales: uno masculino con una duración de 23 días y otro femenino de 28. Hoy no sabríamos nada de él ni de sus locuras numerológicas si no hubiera sido porque fue el mejor amigo de Sigmund Freud, justamente en su época de máxima creatividad, desde 1890 a 1900. Época que culminaría con su libro *La interpretación de los sueños*. La relación entre ambos fue muy extraña, neurótica, y con fuertes corrientes homosexuales soterradas.

Fliess creía que cualquier persona era en esencia bisexual. La componente masculina se encontraba sintonizada al ciclo de 23 días y la femenina, al de 28. En los machos, el ciclo femenino está reprimido y en las hembras, lo está el masculino. Según Fliess estos ciclos tienen que ver con la mucosa de la nariz, y hay una relación entre las irritaciones nasales y toda clase de síntomas neuróticos e irregularidades sexuales. Diagnosticaba estas enfermedades inspeccionando la nariz.

Freud se creyó los desvaríos de su amigo y llegó a pensar que moriría a los 51 años, la suma de 23 y 28, porque Fleiss le dijo que sería su edad más crítica. Más tarde, su amistad se rompió.

Fleiss dejó escritas todas sus ideas sobre los ciclos en *El decurso de la vida*, un volumen de 584 páginas del que se ha dicho que es una obra maestra de excentricidad. Al final del libro aparecen multitud de tablas donde Fliess pretende demostrar que con sus dos números mágicos se pueden obtener todos los ciclos de la naturaleza. Lo que este médico ignoraba es que si en lugar de utilizar el 23 y el 28 se usan otros dos, con la única condición de que sean primos entre sí, se pueden conseguir los mismos resultados.

La popularidad de los ciclos de Fliess creció y sus discípulos añadieron un tercero de 33 días, el ciclo intelectual. Con él se completa lo que hoy se conoce como biorritmos, la mayor tontería numerológica que ha dado el siglo. ●

En las teorías de Fleiss, todos los procesos orgánicos estaban sujetos a biorritmos de 23 (ciclo masculino) o 28 (ciclo femenino) días.

Un buen timo matemático

LUIS OLIVAS

Las cotizaciones de Bolsa, además de a otras variantes, están sujetas al cálculo de probabilidades.

Imagínense que reciben en el espacio de seis semanas, seis cartas prediciendo el comportamiento de un valor de Bolsa, por ejemplo, las acciones ficticias de MUY INTERESANTE. En todas ellas, las predicciones son correctas. Esa impresionante agencia de Bolsa que cuenta con los ordenadores más potentes le anuncia en una séptima carta que si quiere seguir recibiendo más cartas aconsejándole dónde invertir deberá pagar 100.000 pesetas. ¿Les mandaría el dinero?

Es probable que muchos picarían en este timo bursátil tan simple como efectivo. Imagínese ahora que es usted la agencia. Compra un buen papel y envía 32.000 cartas a clientes potenciales. A la mitad les dice que las acciones de MUY INTERESANTE subirán y a la otra mitad, que bajarán. Pase lo que pase en la Bolsa, usted habrá acertado con 16.000. Olvídese de los que recibieron la predicción fallida y concéntrese en los otros. Divida esos 16.000 en dos mitades y haga lo mismo. A unos les dice que subirán y a otro que bajarán. Siguiendo esta estrategia puede suceder que 500 personas hayan recibido seis predicciones acertadas. Cuando les envíe la séptima carta pidiéndoles 100.000 pesetas lo raro será que no acepten. Y 500 personas a 100.000 pesetas son 50 millones limpios. ●

tienen una gran carga emocional.

Otro fenómeno relacionado con las matemáticas es el de las cifras. En la guerra del Golfo, la administración norteamericana anunciaba tras cada bombardeo el número de bajas civiles iraquíes, que no pasaba de la docena. Todos sospechábamos que eran más, y multiplicábamos mentalmente la cifra por 10, o quizá por 100. Pero el número real fue de decenas de miles, lejos de la cifra anunciada e incluso de la imaginada. Lo que estaban haciendo era *anclar* el número de muertos a un valor cercano al dado.

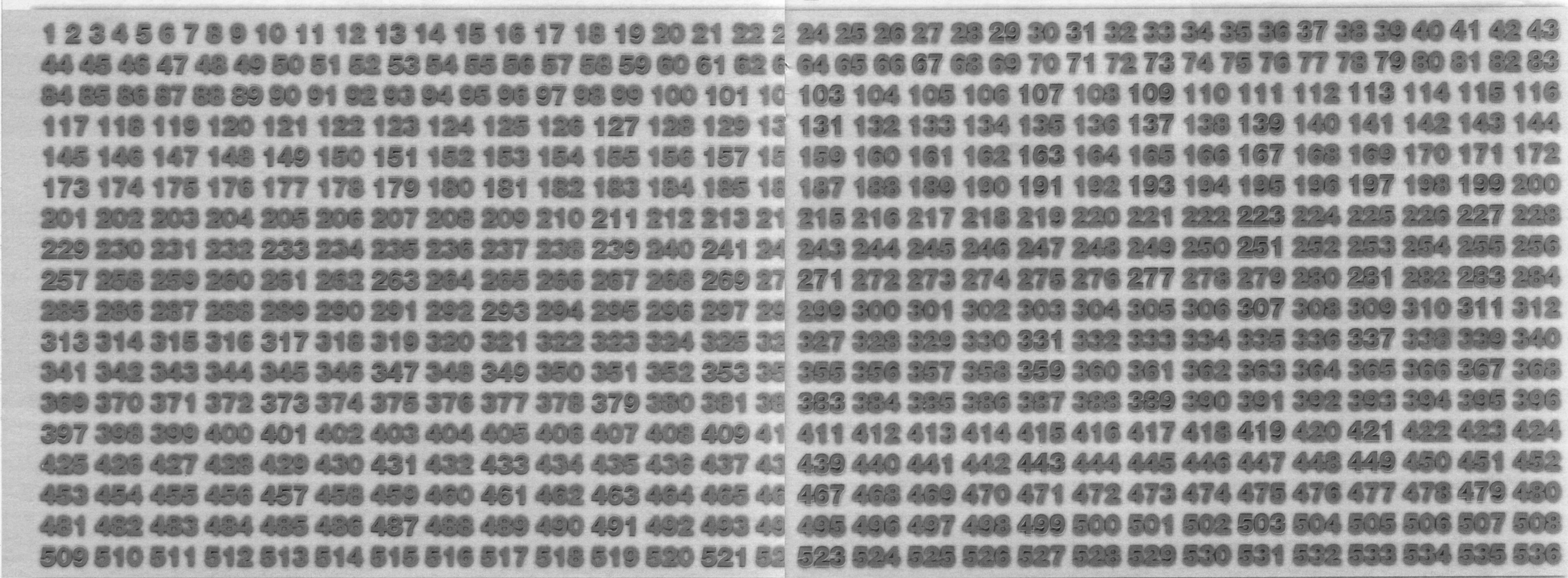
Esto se demostró de manera patente en una serie de experimentos en los que se hacía girar una ruleta con números del 1 al 100 y, tras detenerse en un número, se preguntaba a alguien por el número de países africanos que tienen representación en la ONU. No hace falta decir que, evidentemente, no hay relación alguna entre el número obtenido en la ruleta y el de los países. Pero la respuesta permanecía *anclada*, en promedio, a la cifra que acababa de salir en el juego.

● Hechos encadenados

Nuestro juicio se deja influir por lo que nos cuentan, aun sabiendo que ciertas cosas son fruto de la invención. Imaginemos la siguiente secuencia plausible de acontecimientos: a causa de un incremento en el número de revueltas internas y para afianzarse en el poder, el rey de Marruecos invade Ceuta y Melilla; entonces España declara la guerra a Marruecos; el problema pasa a convertirse en una guerra entre árabes y europeos; entran en acción Libia e Irán. ¿No es cierto que se trata de un escenario muy lógico y bastante probable? Pues no, aunque así nos lo parezca. Nuestro cerebro no sabe, a no ser que se lo enseñemos, que la probabilidad conjunta de que ocurran una serie de sucesos encadenados es siempre menor que la probabilidad del menos probable de sus eslabones. Visto así, ¿hasta qué punto podemos considerar probable una guerra España-Marruecos? ■

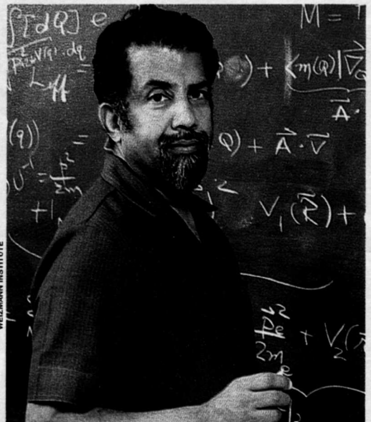
Los ordenadores revolucionan la criptografía y las grandes cifras

Nuestros primos, los números



Una lista de números para gente muy lista
Esta serie muestra marcados en naranja los que son primos, o sea, los que sólo son divisibles por sí mismos y por uno. La mayoría de los códigos de encriptación de mensajes, que sirven para transacciones comerciales e informaciones secretas, están basados en productos de números primos.

Las matemáticas ya no son cosa de sabios distraídos; la informática les ha abierto las puertas al mundo de las cifras gigantescas que permiten desde conocer la dinámica de los gases hasta predecir fluctuaciones de la Bolsa.



WEIZMANN INSTITUTE

El código más secreto
Adi Shamir, matemático del Instituto Científico Weizmann de Israel, es uno de los inventores del código RSA, una fortaleza criptográfica de 129 cifras. Cuando lo inventó en 1977 dijeron que harían falta 40.000 billones de años para descifrarlo, pero en 1996 se logró.

Si nos hablan de matemáticas enseguida nos viene a la cabeza una imagen: un individuo algo huraño sentado ante una mesa y con cientos de papeles garrapateados con fórmulas ininteligibles. Esto podía ser cierto hace bastantes años, pero desde el advenimiento de los ordenadores se ha desarrollado una nueva matemática destinada a resolver problemas antaño irresolubles: la matemática computacional.

De hecho, la información es poder. Intervenir, contaminar, desinformar, ocultar y descubrir es parte de ese juego de poder. Quien más información acumula y quien mejor la oculta posee más poder. Aquí es donde nace la criptografía, el arte de escribir mensajes en clave secreta o enigmáticamente. Desde las guerras entre Esparta y Atenas se han empleado diferentes sistemas para ocultar información vital al enemigo, pero en la actualidad la necesidad de encriptar información se ha vuelto completamente imprescindible. El ritmo vertiginoso de producción, el ingente tráfico de documentos y la rapidez necesaria para la mayoría de las transacciones exige un método rápido, efectivo, cómodo y, sobre todo, seguro de comunicación.

● Mensajes secretos

La gran revolución se dio en 1975 cuando dos ingenieros electrónicos de la Universidad de Stanford, Whitfield Diffie y Martin Hellman, sugirieron el primer concepto nuevo en criptografía desde el tiempo de los griegos. Hasta entonces todo se basaba en una clave que permitía tanto cifrar como descifrar el mensaje. En el nuevo esquema, llamado criptografía de clave pública, existen dos claves: una de cifrado, que es conocida por todos, y otra de descifrado, que es secreta. Si alguien necesita recibir un mensaje cifrado sólo tiene que crear ambas claves y enviar por la red sólo la de cifrado.

Ésta fue la idea genial de Diffie y Hellman: sugerir que una manera de diseñar sistemas criptográficos seguros era utilizando problemas computacionalmente intratables, esto es, aquellos que un ordenador tardaría millones de años en resolver. Pero ¿cuáles son?

En la actualidad, el método más utilizado es el llamado RSA, desarrollado en 1977 por Ronald Rivest, Adi Shamir y Leonard Adleman. Este sistema se basa en que no existe un algoritmo suficientemente eficiente para factorizar grandes números que sean producto de dos números primos. Los ordenadores más potentes del mundo tardarían muchísimos años en *reventar* una clave basada en la factorización. Sin embargo, Internet ha venido a cambiar las tornas. ¿Para qué construir ordenadores cada vez más grandes si a través de la red tenemos acceso a cientos de miles de ellos y entre todos constituyen un gigantesco ordenador? Fue así como se consiguió romper el RSA.

● Dinámica de fluidos

Otro de los problemas que sería intratable sin la ayuda de la matemática computacional generada por los ordenadores es el movimiento de los fluidos, ya sean líquidos o gases. Predecir cómo se va a mover el agua por una tubería o la sangre por las arterias es un arte considerablemente difícil y que tiene una gran importancia. Una de las técnicas que se ha desarrollado con más rapidez en las últimas décadas, gracias al aumento en la potencia de cálculo de los ordenadores, es la llamada Dinámica de Fluidos Com- ➤

AGE FOTOSTOCK

Un gran chorro puesto en una ecuación
Es bien conocido el movimiento de los fluidos, por ejemplo en los pantanos, pero su traducción en ecuaciones matemáticas es muy compleja.

putacional. Las leyes físicas que gobiernan el movimiento de los fluidos son bien conocidas, pero las ecuaciones que las traducen al lenguaje matemático son complejas y sólo se pueden obtener soluciones exactas en un puñado de casos tan simples que no sirven para mucho. Los matemáticos bautizaron esas ecuaciones con el enigmático nombre de *ecuaciones diferenciales no lineales en derivadas parciales*.

Debido a esta complejidad inherente, si se quiere conocer cuál va a ser el comportamiento de un fluido en unas determinadas circunstancias, científicos e ingenieros han acabado siempre haciendo experimentos. Claro que en ocasiones no es posible llevarlos a cabo, porque no podemos *crear* una Tierra para estudiar la atmósfera ni *inventar* un río para saber cómo funcionan los embalses. Por eso, la manera de atacar estos problemas es mediante modelos de ordenador que resuelvan esas intratables ecuaciones.

En el interior del planeta

Un problema parecido lo tiene la sismología cuando estudia la propagación de las ondas sísmicas y, a partir de éstas, trata de elucidar cómo es el interior de nuestro planeta. Para conseguirlo, los especialistas sólo se valen de medidas sísmicas realizadas en la superficie. Esto les ha obligado a desarrollar modelos teóricos que reproduzcan la propagación de las ondas sísmicas por el interior de la Tierra. Como en el caso de los fluidos, las ecuaciones se conocen desde hace más de cien años pero para ellas no existen lo que los matemáticos llaman soluciones analíticas, esto es, una fórmula en la que sólo se tengan que sustituir los datos para obtener el resultado apetecido. Su resolución pasa por técnicas numéricas, por el uso de ordenadores. De esta forma, la solución no es más que una ingente cantidad de números que describen, en cada momento, el estado de cada punto de la corteza o del interior de la Tierra. Por supuesto, es obvio que las técnicas numéricas dependen de la capacidad de los ordenadores para realizar las cuentas necesarias. Las ecuaciones son lo suficientemente complicadas como para requerir los ordenadores de los grandes centros de supercomputación del mundo. De hecho, los avances realizados en sismología los últimos años han sido posibles gracias al concepto de computación en paralelo: en lugar de realizar las operaciones en orden, una tras otra, se dispone de diferentes ordenadores que se reparten la tarea asignada. Un símil puede ser la cadena de montaje de un coche. En lugar de tener una única serie donde se construya todo el automóvil, se disponen de varias que van montado diferentes partes de él y al final se juntan los resultados obtenidos.

Si líquidos y sólidos presentan problemas a la hora de resolver las ecuaciones que rigen su comportamiento, no menos problemas van a dar los gases. Un litro de aire un día de primavera contiene unos 20.000 trillones de moléculas: querer describirlo estudiando el comportamiento de cada una de ellas es prácticamente imposible. Para hacerlo, se emplean métodos estadísticos que permiten obtener relaciones entre las propiedades de las moléculas individuales –energía, velocidad...– y las propiedades del gas como un todo –presión, temperatura...–. En estos estudios se pusieron las bases de la rama de la física sin la cual sería imposible comprender cosas tan dispares como la estructura interna de las estrellas y los superconductores: la física estadística.

El polen es influenciable

Esta rama científica tiene multitud de aplicaciones, desde las propiedades eléctricas y magnéticas de los materiales a los rayos cósmicos. Pero quizá lo más espectacular son las transiciones de fase: el paso de la materia de un estado a otro, por ejemplo, de gas a líquido o un cristal que cambia de forma. Estos cambios, repentinos y acentuados, son uno de los problemas más difíciles pero más interesantes de resolver de la física estadística.

Otro es el de los procesos estocásticos, aleatorios, como el movimiento que realiza una partícula de polen en el agua, llamado movimiento *browniano*. El polen está sujeto a tal número de influencias, principalmente colisiones con otras moléculas del agua, que constituye la mejor muestra de movimiento errático.

Es aquí donde aparece una conexión impensable entre física y economía. El mercado también está sujeto a un número muy alto de influencias, todas ellas impredecibles, que hacen imposible prever su evolución futura. ¿Puede establecerse una relación entre ambas disciplinas? Sí. En 1900 el matemático francés Bachelier descubrió la teoría del movimiento browniano a propósito de las fluctuaciones de la Bolsa. Pero este trabajo quedó olvidado hasta que en los años 60 y, sobre todo, a partir del trabajo de Black y Scholes de 1973, en el que introdujeron métodos estocásticos para describir ac- ➤

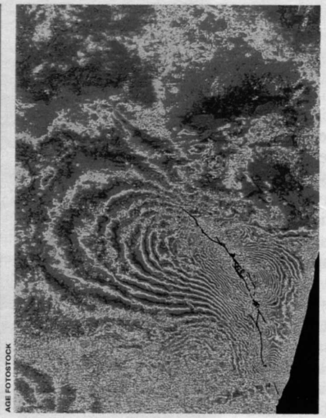
Cómo me lo *factoriciaría* yo

ASA

EL matemático Leonhard Euler (1707-1783) factorizó el quinto número de la serie de Fermat. El noveno número de Fermat lo factorizaron 200 matemáticos y 1.000 ordenadores, en 1990.

Seguro que todos recordamos, de nuestros tiempos de colegio, los ejercicios de factorización o descomposición de un número primo en producto de factores que también sean números primos. Por ejemplo, 15 es el producto del 3 y del 5 (ambos, primos). Factorizar números se convierte en algo casi imposible cuando el número es grande, por ejemplo, 4.294.967.297, producto de 641 por 6.700.417, dos números primos y precisamente el quinto número de una serie que inventó Fermat.

Con tal despliegue de pirotecnia matemática uno se pregunta para qué sirve perder el tiempo factorizando números. Pero bancos, tarjetas de crédito y ministerios de defensa encriptan sus datos con códigos basados en los factores de grandes números. Si alguien descubre una forma rápida de hacerlo podría saltarse los controles de seguridad de todas esas organizaciones y provocar un lío mayúsculo. Por eso, cualquier descubrimiento relacionado con la factorización se convierte enseguida en cuestión de seguridad nacional.



AGE FOTOSTOCK

Esto es un terremoto
Con dos imágenes del satélite ERS-1 se formó esta primera foto desde el espacio de un terremoto de magnitud 7,3 que se produjo en California.

Mapa de los cuatro colores

Cuántos colores son necesarios para iluminar un mapa arbitrario, de modo que nunca dos regiones colindantes sean del mismo color? Para resolver este problema se debe evitar una confusión y una tentación. La confusión es equivocar esta pregunta con otra mucho más sencilla y ya resuelta que dice que es imposible dibujar un mapa de cinco regiones en las que cada región sea adyacente con las otras cuatro –las que están en contacto por un único punto no se consideran colindantes–. La tentación es ir dibujando regiones e ir coloreándolas, hasta llegar a un punto en que se necesite un quinto color. En este caso, debemos coger otro papel, dibujar las mismas regiones sin pintarlas, y colorearlas de manera diferente sin necesitar ese quinto color.

La solución a este fascinante problema se encontró en 1976. Los matemáticos Appel y Haken lo demostraron tras 1.500 horas de computadora, con lo que el teorema de los cuatro colores se convirtió en el primer teorema matemático que se demostró utilizando un ordenador, ofreciendo una prueba que no podía ser verificada directamente, con lápiz y papel, por otros matemáticos. Algo ha cambiado en la matemática desde entonces. ●

KEVIN HORAN

¿Chivarse o no chivarse?
El dilema del prisionero es un problema ya clásico que sirve de base a la teoría de juegos, inventada por John von Neumann. Consiste en actuar dependiendo de la estrategia del contrario.

tividades financieras como el mercado de opciones, se asistió a un renovado interés por esta curiosa relación. No deja de ser fascinante que investigar el comportamiento de un gas sirva para evaluar los riesgos a los que se enfrenta un banco en el mercado mundial.

Y ahora veamos un problema ya clásico: la policía ha capturado a dos ladrones que mantiene incomunicados, cada uno en una habitación. Los criminales tienen dos opciones: implicar al otro o callarse. Si ninguno confiesa, a ambos les caerá un año de cárcel. Si uno confiesa pero el otro no, el primero saldrá libre y al otro le caerán 15 años. Si ambos confiesan, estarán en chirona 10 años. ¿Qué hacer? Esta situación, conocida como el dilema del prisionero, representa el comienzo de la teoría de juegos, desarrollada por el matemático John von Neumann, considerado por muchos como el hombre más inteligente de este siglo (con seis años dividía mentalmente dos números de ocho cifras y bromeaba con su padre en griego clásico).

● Armamentos y aranceles

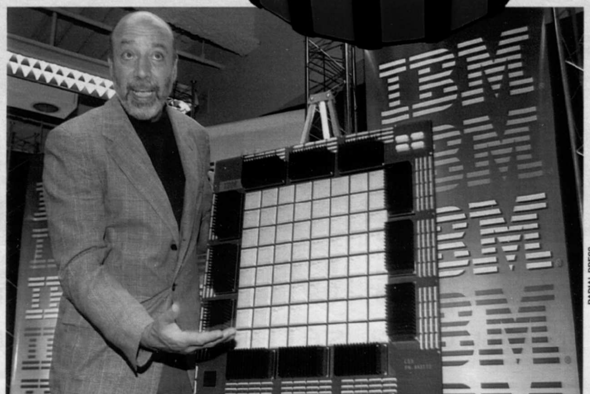
En la teoría de juegos, de amplio uso en economía, el dilema se debe estudiar siguiendo el equilibrio de Nash: cada jugador ha de responder con la mejor estrategia posible teniendo en cuenta las de los otros jugadores. En definitiva, suponiendo que sé la táctica que van a seguir mis contrarios, ¿es la mía mi mejor elección? En el caso de los prisioneros, la mejor estrategia es, paradójicamente, chivarse. Si uno confiesa y el otro se calla, sale libre el que confiesa. Luego la mejor respuesta a que el otro se calle es confesar. De igual modo, si el otro se chiva, la estrategia óptima es chivarse también, porque si no, pasas cinco años más en la cárcel.

Estas situaciones suelen darse también en la vida real. La escalada de armamentos responde, en gran medida, a un dilema del prisionero, al igual que los aranceles para los productos. Así, y a pesar de que la economía más simple enseña que la mejor forma de progreso es el mercado no arancelario, el dilema del prisionero revela que eso no sucederá. En este caso, el hecho de chivarse es lo mismo que en el otro poner aranceles.

Las herramientas de la teoría de juegos sirven para una amplia variedad de problemas, tales como por qué las gasolineras tienden a agruparse en lugar de estar distanciadas o por qué las compañías podrían hacer más dinero uniendo varios productos en uno sólo (como hizo Microsoft al unir Windows e Internet Explorer). Las aplicaciones directas de las matemáticas al mundo real han hecho expresar a más de uno que, desde que las conoce, nunca ha vuelto a mirar a un supermercado de la misma forma que antes. ■

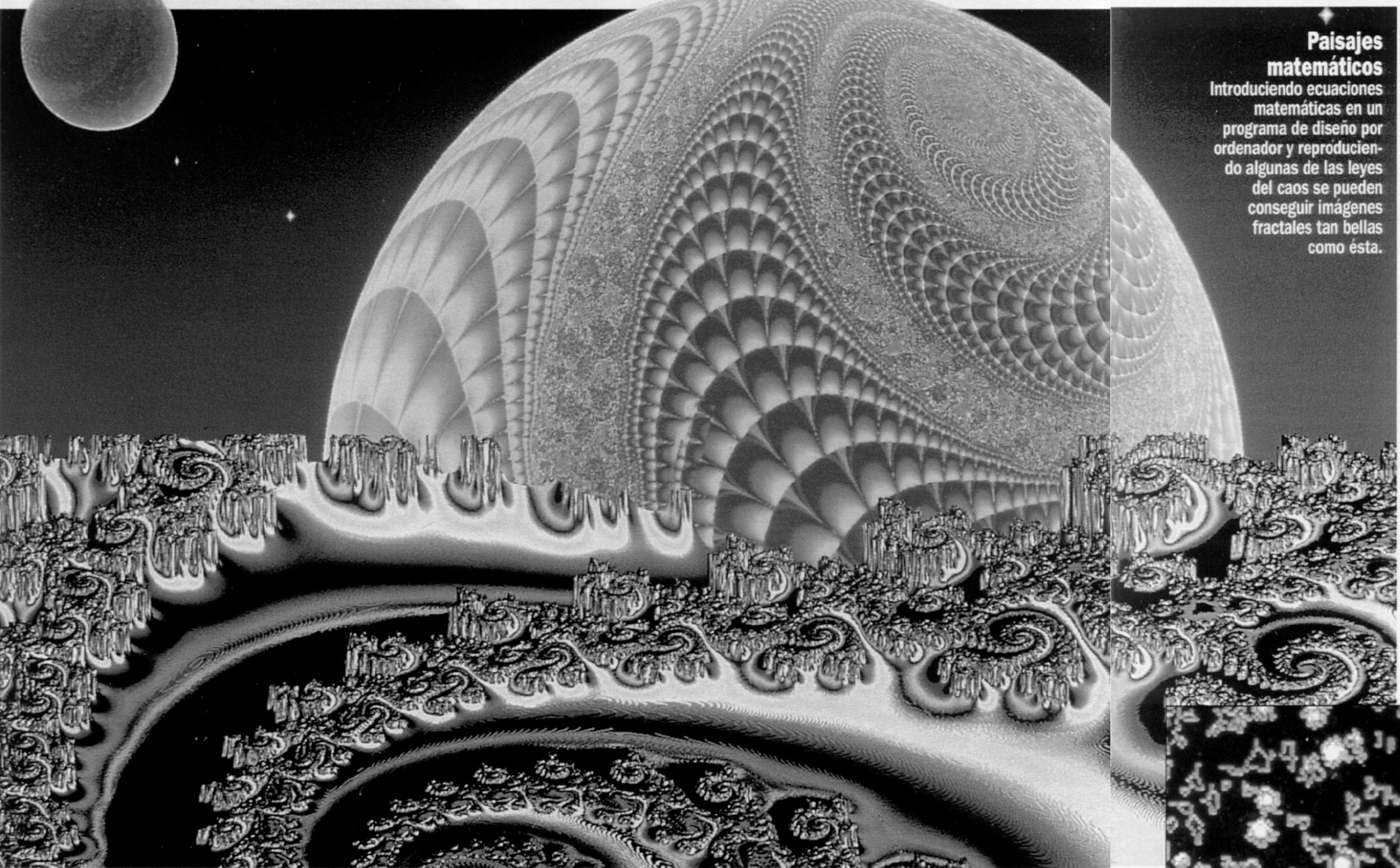
AGE FOTOSTOCK

Revolución de las máquinas
Aunque ahora está superado por otros ordenadores más potentes, el *Cray Supercomputer* fue durante una época una máquina revolucionaria. La informática ha dado un vuelco importantísimo al cálculo matemático de las grandes cifras.



RADIAL PRESS

El *Blue Gene*
Paul M. Horn, vicepresidente de la sección de investigación de IBM, muestra una maqueta de la placa base de un nuevo superordenador, el *Blue Gene*. Éste, que será 1.000 veces más potente que el *Deep Blue* que ganó al ajedrez a Kasparov y 500 veces más rápido que el más veloz del mundo, se utilizará para desvelar la estructura de las proteínas.



GREGORY SAMS/SPL

Paisajes matemáticos
Introduciendo ecuaciones matemáticas en un programa de diseño por ordenador y reproduciendo algunas de las leyes del caos se pueden conseguir imágenes fractales tan bellas como ésta.

Las nuevas matemáticas impulsan las ciencias de vanguardia

Ecuaciones del clima y del caos

Muchas de las grandes teorías científicas de la actualidad han surgido gracias al avance de las matemáticas.

El silencioso y genial físico Paul Dirac afirmó que "es más importante la belleza de las ecuaciones que el que se ajusten a los experimentos".

Pero ¿en qué consiste la belleza matemática? Una de las claves es la simetría. Todos nosotros nos hemos enfrentado alguna vez a ella. Cuando damos vueltas sobre nuestro dedo a un balón de fútbol, nos parece que el balón no cambia: esto se llama simetría rotacional. Una serie alineada de coches del mismo tipo y del mismo color presenta simetría traslacional, pues es indistinguible de otra donde el último coche hubiera sido colocado el primero, y nosotros mismos, salvo detalles muy particulares, somos indistinguibles de nuestra imagen reflejada en un espejo: es la simetría especular. Las leyes naturales representan simetrías halladas en el universo y con frecuencia las matemáticas nos abren las puertas a ellas.

Durante el siglo XIX se había desarrollado toda una rama de la ciencia que clasificaba las simetrías organizándolas en grupos: es la llamada, a la sazón, teoría de grupos. Y lo que en un principio era una teoría tremendamente abstracta y, por tanto, con ninguna utilidad práctica, se reveló a mediados de este siglo como fundamental para entender la física de lo muy pequeño.

Corría el año 1963 cuando el físico Murray Gell-Mann popularizó el concepto de los quarks, los ladrillos a partir de los cuales se construyen los bien conocidos protones y neutrones, entre otros.

Lo más pequeño

Gell-Mann y Yuval Neïeman estaban estudiando la interacción fuerte, la fuerza que hace que protones y neutrones queden pegados. Y ambos descubrieron en el cajón de sastre de las simetrías una que les venía muy bien para describirla: los grupos de Lie, llamados así en honor al matemático noruego Sophus Lie. De uno de ellos se deducía la existencia de los quarks.

En 1973, David J. Gross, Frank Wilczek (en Princeton) y H. David Politzer (en Harvard) se dieron cuenta de que las interacciones entre quarks se podían describir a partir de unas teorías matemáticas diseñadas hacia 20 años por Chen Ning Yang y Robert Mills del Laboratorio Nacional de Brookhaven y hoy conocidas como teorías de Yang-Mills. A pesar de que nadie sabía muy bien cómo usarlas, su belleza intrínseca era tal que merecían ser estudiadas. De hecho, los teóricos es- →

La tragedia de un pionero

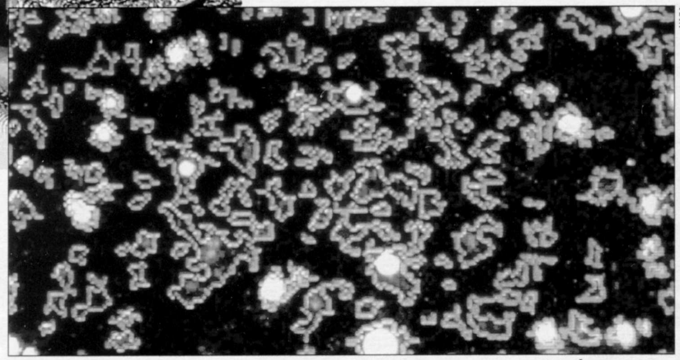
SPL

Evariste Galois (1811-1831), creador de la teoría de grupos.

En 1827, recién cumplidos los 16 años, el francés Evariste Galois ya sabía lo que sus maestros ignoraban: que era un genio en matemáticas. Sin embargo, su carrera hacia la gloria científica iba a ser más dura de lo que imaginaba. Primero, varios intentos fallidos de entrar en la Escuela Politécnica de París; luego, una gafada relación con prestigiosos matemáticos de la época, como Cauchy o Fourier, especialistas en hacer desaparecer sus obras y artículos. Más tarde, la tragedia de ver cómo su padre, acorralado por la culpa de una serie de intrigas clericales, se suicidaba.

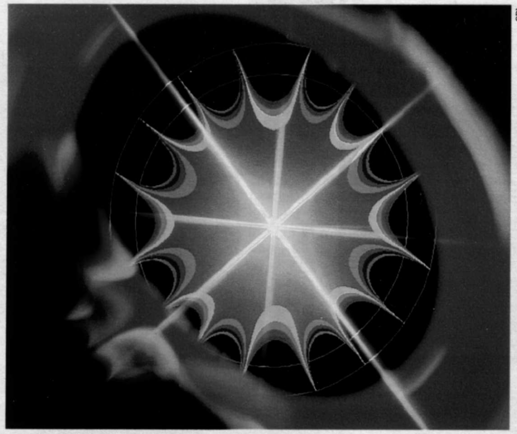
Su perseverancia, no obstante, le sirvió para pasar a la historia como el primer gran exponente de la teoría de grupos, lo que constituye uno de los hitos de la matemática de todos los tiempos.

La vida de Galois fue tremenda hasta el final: murió tras batirse en duelo a la temprana edad de 20 años. Jamás alguien tan joven ha hecho un trabajo tan fundamental para el desarrollo de las matemáticas.



NASA

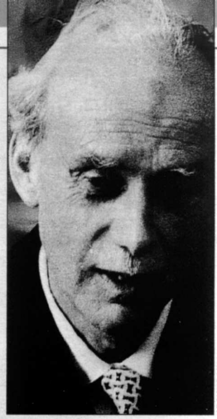
¿Qué nos ocultan las galaxias?
Esta imagen del campo profundo del cosmos fue tomada por el *Hubble* en 1996 y ha sido tratada por ordenador. Las matemáticas permiten extraer simetrías y deducir leyes del aparente caos.

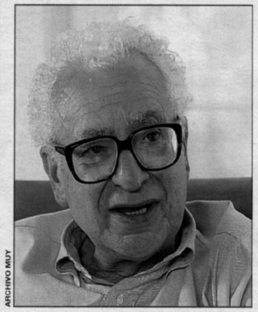


Ordenado y bien ordenado
El orden y la simetría pueden estar en el origen de todo, como muestra esta representación de la distribución de fuerzas de un campo magnético.

Agradecidos a los grupos

A la derecha, Paul Dirac (1902-1984). Este físico teórico, conocido por su trabajo en la mecánica cuántica, amaba apasionadamente la belleza de las ecuaciones.





A la izquierda, el físico de Santa Fe Murray Gell-Mann, quien llegó a la revolucionaria formulación del quark gracias a la teoría de grupos.

taban enamorados de ellas. Un romance que se justificaría años más tarde, pues constituyen la base de la cromodinámica cuántica, la teoría que explica el núcleo atómico.

Y no sólo eso. A finales de la década de los sesenta, Glashow, Salam y Weinberg utilizaron la teoría de grupos para unificar la fuerza electromagnética con la fuerza nuclear débil, la responsable de la desintegración radiactiva.

En otras ocasiones, el proceso ha sido inverso y la mera inspección cuidadosa del mundo que nos rodea ha dado lugar a un desarrollo nuevo en matemáticas.

En 1963 Edward Lorenz, un matemático de corazón al que la Segunda Guerra Mundial le había obligado a dedicarse a la meteorología, publicaba un artículo titulado *Flujo Determinista no Periódico*. Había descubierto que mientras jugaba con un modelo meteorológico sencillo en su ordenador de válvulas de vacío y cables, pasaban cosas muy raras. Introduciendo inadvertidamente datos que diferían entre sí menos de una milésima descubrió que las predicciones meteorológicas resultantes eran completamente diferentes. Lorenz dedujo con acierto que todo era debido a las pequeñas variaciones introducidas en los datos iniciales. Esto era algo totalmente inesperado, pues físicos y matemáticos estaban acostumbrados a que si se cambiaban levemente las condiciones iniciales, los resultados diferían también en una cantidad proporcionalmente pequeña.

● El caos lo ocupa todo

Pero, al parecer, había cosas que no funcionaban de esa forma. De hecho, prácticamente toda la naturaleza se rige por esa ley tan inesperada. En el argot matemático se dice en estos casos que tenemos sistemas no lineales.

Este comportamiento casi impredecible ha dado lugar a toda una rama de la física y las matemáticas: la ciencia del caos. No es un nombre muy acertado, aunque sí muy gráfico. Quien lo acuñó fue un matemático algo excéntrico llamado James Yorke. El caos reside en todas partes y es un obstáculo fundamental para predecir el futuro. Podemos conocer las leyes que rigen el universo, pero es posible que no podamos utilizarlas para predecir lo que ocurrirá más adelante. Evidentemente, hay situaciones en las que la ciencia se ve incapaz de decir el camino que tomará después de un rato un sistema.

● Los físicos no se forran

Por ejemplo, si modificamos ligeramente, pero muy poco, el giro de una ruleta, cambiará el número donde caiga la bola. Si no fuera así, los físicos se forrarían en los casinos.

El caos del que aquí estamos hablando no significa azar y desorden. De hecho, exhibe una estructura definida. Si lo observamos el tiempo suficiente, en él siempre aparecen unos monstruos geométricos que fueron descubiertos por Mandelbrot, los fractales. Ejemplos de este comportamiento, que se aplica a todos los procesos naturales, son el habitual goteo de un grifo mal cerrado, las fibrilaciones cardíacas, la epilepsia, los asuntos mundanos de la economía, el clima o la ecología y cuestiones tan exóticas como el movimiento en volteretas de la luna de Saturno Hiperión o el loco giro de la Gran Mancha Roja de Júpiter.

Ésta es la ciencia del caos aunque, como ha dicho el matemático Stanislaw Ulam, llamar a la ciencia del caos "ciencia no-lineal" es como llamar a la zoología "la ciencia de los no-elefantes". ■

Un desagradable juego de Júpiter

Si alguna vez miramos una fotografía de Júpiter, lo primero que descubriremos es la existencia de una inmensa mancha roja. Se trata de un torbellino con un tamaño el doble del diámetro de la Tierra. Ha existido desde que tenemos conocimiento del planeta, hace ya tres siglos, y podemos decir que la Gran Mancha Roja ha estado allí desde siempre. No fue hasta la llegada de nuestras sondas espaciales *Voyager* cuando descubrimos que esta mancha está acompañada por una cohorte de remolinos, mucho más diminutos y de vida efímera, que surgen y desaparecen sin seguir un patrón definido. El movimiento y la estabilidad de la mancha roja es una consecuencia directa de las leyes que rigen la dinámica de los fluidos. Son ecuaciones deterministas y, por tanto, tendríamos que haber sido capaces de explicarlas. Pero no lo fuimos. El problema surge porque las ecuaciones que describen el comportamiento de la Gran Mancha Roja, y en general las de la dinámica de fluidos, son bastante complicadas y en muchas ocasiones completamente desagradables: son ecuaciones no lineales. Uno es incapaz de resolverlas elegantemente, con lápiz y papel, y debe recurrir a soluciones numéricas, con ayuda de ordenadores. Gracias a ellos, hemos podido estudiar su comportamiento, lo que supone conocer la esencia misma del caos. ●

La dinámica de la Gran Mancha Roja joviana es muy difícil de reducir a ecuaciones.

Nuestra concepción del mundo depende del estudio de las formas

Paisajes de geometría

Inventada por Euclides hace 2.300 años, la geometría es la ciencia matemática más palpable y que más nos ayuda en la vida cotidiana. Ésta es su fascinante historia.

Los antiguos egipcios veían la Tierra con forma de huevo, protegido de la noche por la Luna que, a su vez, era un gran pájaro blanco que, como las ocas, daba calor a sus futuras crías. Homero entendía nuestro planeta como un disco redondo rodeado por el río Océano, algo que le hacía mucha gracia a Herodoto, que consideraba evidente pensar que estaba rodeado por un desierto. Para Esquilo nuestro planeta era un paralelogramo bien proporcionado. Por el contrario, los aztecas creían que vivíamos en un cuadrado. De hecho, el universo entero se reducía a cinco cuadrados, uno central y los otros cuatro en cada uno de sus lados conteniendo los cuatro puntos cardinales. Para otros pueblos el cosmos era una rueda, o incluso un tetraedro.

Discos, huevos, cuadrados... Todos ellos son formas, y el estudio de las formas corresponde a la geometría, palabra que procede del concepto griego "medición de la Tierra". Además de la aritmética, el arte de sumar y restar, posiblemente no haya una rama de las matemáticas más cercana a la realidad.

● Una vida más fácil

La geometría se encuentra a nuestro alrededor: desde la concha del *Nautilus pompilius* al rosetón de la portada de la catedral de Chartres, desde las parcelas de un pueblo de la meseta castellana hasta el cristal de sal común. Sin ella resulta imposible establecer algo tan simple y, a la vez, tan necesario como es la extensión de una tierra de cultivo. Imaginemos lo complicada que puede convertirse la compra de una parcela rectangular a tantas pesetas la yugada, sabiendo que una yugada no es otra cosa que la tierra arada por una pareja de bueyes desde que sale el sol hasta el ocaso. Hoy, muy pocos confiaríamos en una medición tan imprecisa. Mal que nos pese, para hacerla, echaremos mano de la geometría que nos enseñaron en la escuela y multiplicaríamos el largo por el ancho.

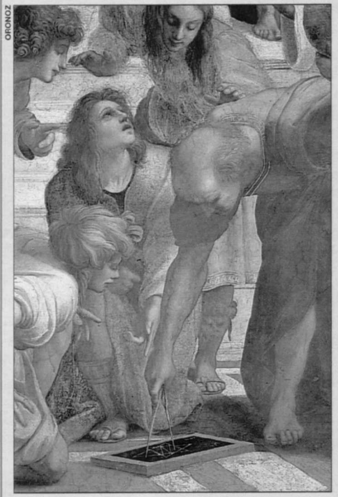
La ciencia de la geometría nació hace 2.300 años en la entonces próspera y floreciente ciudad de Alejandría. La dinastía macedonia de los Ptolomeos había fundado un templo a las musas, el Museo, famoso por su biblioteca compuesta por miles de pergaminos traídos de todas partes. Fue allí donde Euclides escribió uno de los libros más famosos de la historia: *Elementos de geometría*. La obra es importante por dos motivos: uno, porque recopilaba todo lo que hasta entonces se sabía de geometría; dos, porque lo hizo de una manera que quedaría por siempre como método de trabajo en las matemáticas. Éste consiste en que, a partir de unos pocos postulados que se aceptan sin demostración porque resultan evidentes, se deducen todas las consecuencias y teoremas posibles. Euclides partió de cinco postulados fundamentales (ver recuadro derecho).

El libro se convirtió en un texto básico para cualquier matemático de los siglos venideros y la geometría, un objeto de deseo para muchos pensadores. El filósofo británico Thomas Hobbes ojeó por primera vez la obra de Euclides a los 40 años. Más tarde, cuando se enfrentó al teorema de Pitágoras no tuvo más remedio que exclamar: "¡Por Dios! ¡Esto es imposible!" Tras volver atrás y rehacer paso a paso la demostración, se convenció. Desde entonces su pasión por la geometría fue tal que llegó a aplicar sus métodos a la filosofía política.

Hoy el mundo seguiría siendo euclidiano –es decir, plano– si no fuera por el quinto postulado del propio Euclides, también conocido co- →

Las cinco tablas de la Ley

Euclides basó su geometría en cinco postulados, es decir, ideas que se aceptan sin demostración por ser evidentes y que sirven de andamiaje para el resto del aparato teórico. Éstos son:



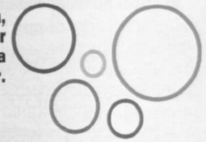
ORONOZ

Euclides muestra su geometría plana en el cuadro *La Escuela de Atenas*, de Rafael.

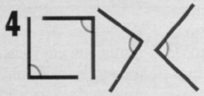
1 **Por dos puntos se puede trazar siempre una línea recta.**

2 **Toda línea recta finita puede prolongarse infinitamente.**

3 **Dado un punto cualquiera, siempre se puede trazar un círculo de cualquier radio a su alrededor.**

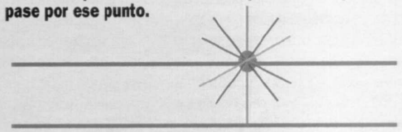


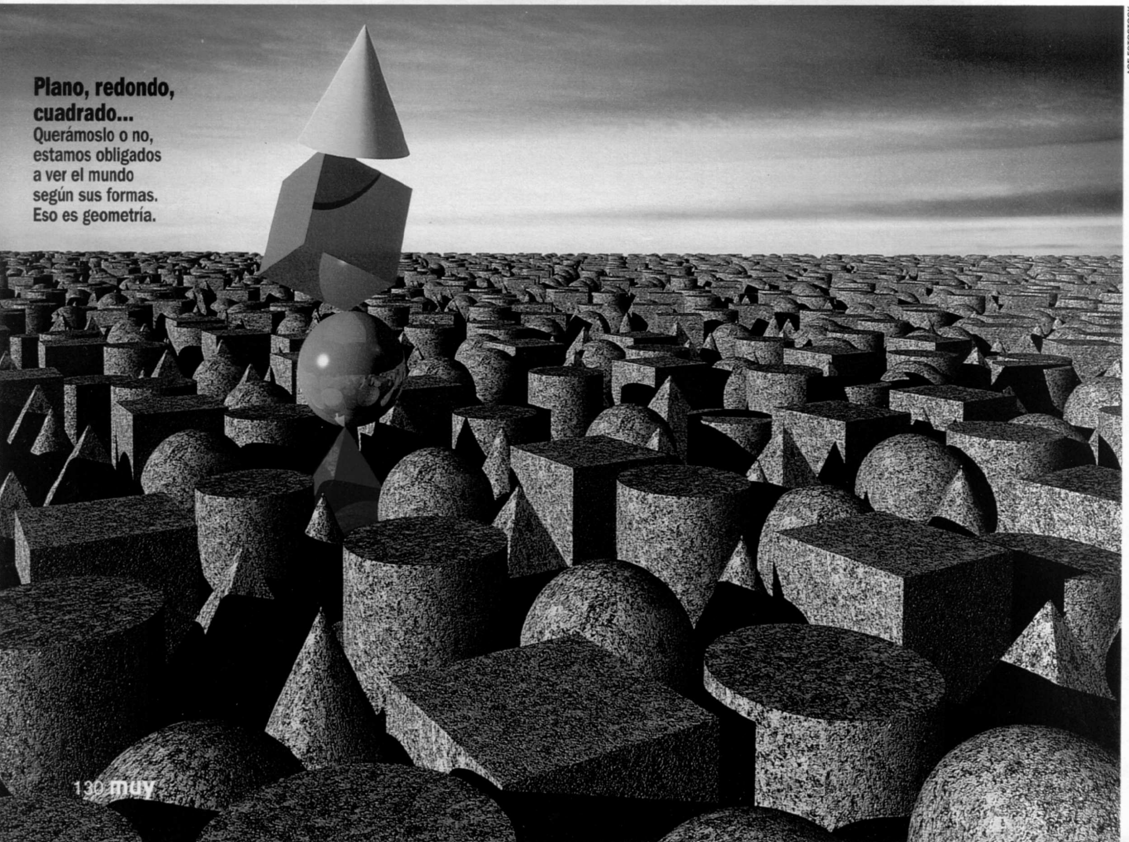
4



Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.

5 **Dada una recta y un punto que no pertenece a la recta, sólo se puede trazar una línea paralela a la primera que pase por ese punto.**





Plano, redondo, cuadrado...
Querámoslo o no, estamos obligados a ver el mundo según sus formas. Eso es geometría.

mo el postulado de las paralelas, que en su versión moderna, ofrecida por el matemático John Playfair en 1795, dice: "Dada una recta y un punto que no pertenece a la recta, no se puede trazar más que una línea paralela a la primera que pase por ese punto". Este quinto postulado no le gustaba demasiado a Euclides, de hecho en su libro intentó utilizarlo lo menos posible.

● El quinto independiente

Durante mucho tiempo, los matemáticos buscaron afanosamente la forma de demostrar que ese quinto postulado podía deducirse de los otros cuatro, pero buscaron en vano, a pesar de que en diferentes ocasiones se creyó haber encontrado la prueba. Hubo que esperar al tardío año de 1817 para que uno de los matemáticos más brillantes de la historia, Karl Friedrich Gauss, se convenciera de que este postulado era independiente de los otros cuatro. De hecho, descubrió que si lo negaba, si permitía trazar más de una paralela a una recta por un punto dado, obtenía una geometría totalmente consistente. Pero el brillante y nada polemista Gauss no se atrevió a publicar sus resultados. Las ideas del filósofo Inmanuel Kant dominaban el pensamiento de la época: "la geometría euclidiana es la necesidad inevitable del pensamiento", había dicho. Y, al igual que había sucedido en la Edad Media con Aristóteles, no se podía contradecir al filósofo.

Lo que sí hizo fue comentárselo a su amigo matemático Farkas Bolyai, que a su vez instruyó a su hijo János en el arte de las matemáticas, pero advirtiéndole: "No pierdas ni una hora de tu tiempo en el problema del quinto postulado". Como buen hijo no hizo caso a su padre. El trabajo de János sobre geometría creó un nuevo mundo y Gauss calificó al joven geómetra como "un genio de primer orden".

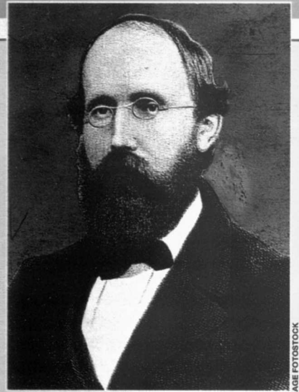
● Más cerca de Einstein

Seis años más tarde, en 1829, un ruso llamado Nicolai Ivanovich Lobachevsky publicaba un trabajo sobre esta nueva geometría en una oscura revista de la universidad local. Pero su intento de hacerlo llegar a un público más amplio fue ahogado por uno de los popes de las matemáticas rusas, Ostrogradski.

Este mismo fantasma persiguió a una de las mentes más originales de las matemáticas: Georg F. B. Riemann. Discípulo de Gauss, su conferencia impartida el 10 de junio de 1854 para obtener su Habilitación, el grado que le permitía ser profesor en una universidad alemana, es recordada como un clásico de las matemáticas. Su título: *Sobre las hipótesis que fundamentan la geometría*. El trabajo no sería comprendido hasta 60 años después. Porque, ¿quién podía imaginar que oculto tras el quinto postulado de Euclides se encontrase el mismo universo?

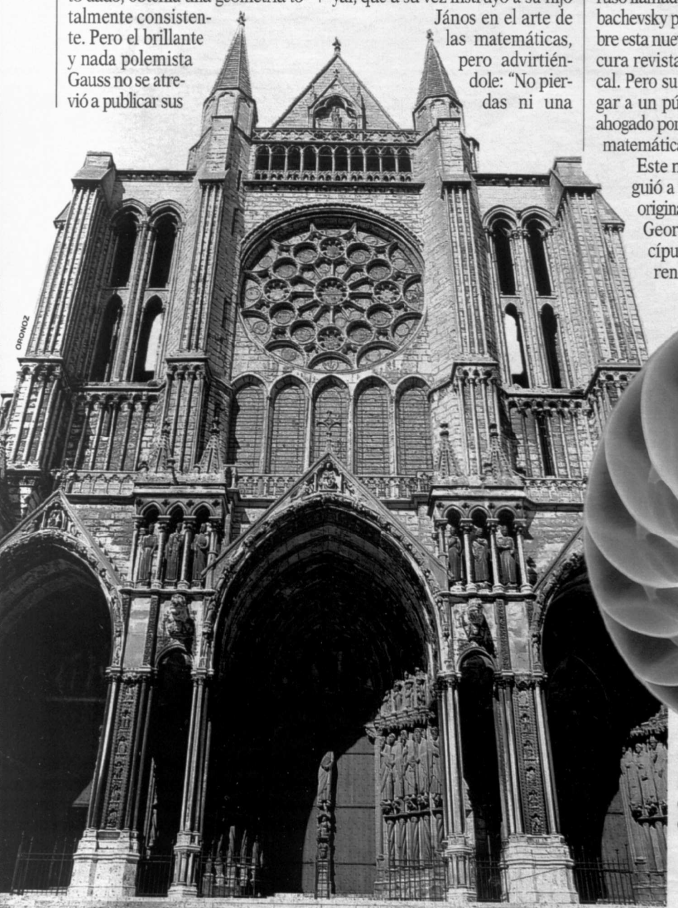
En noviembre de 1915, Albert Einstein lanzó al mundo su obra maestra, producto exclusivo de una mente prodigiosa: la Teoría General de la Relatividad. Con ella pudimos comprender no sólo cómo actúa la gravedad, sino qué es. La presentó en la Academia de Ciencias Prusiana, hecho que en adelante recordaría como el momento más dichoso de su vida. Hasta entonces, la gravedad era entendida como el genial Isaac Newton la había formulado en su celebérrimo *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural*: una fuerza de acción a distancia e instantánea. De hecho, Newton nunca trató de explicar lo que era la gravedad, sino de dar una descripción matemática de cómo actuaba. Fue en el curso de las tres famosas lecciones dictadas por Einstein cuando se hizo la luz. En ellas, dio a conocer una teoría que conectaba la geometría del espacio con la materia presente en él.

Éstos sí que fueron dos "figuras"

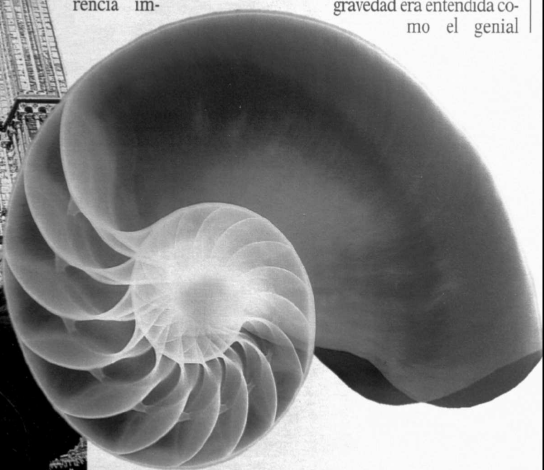


AGE FOTOSTOCK

Junto a estas líneas, Karl Friedrich Gauss (1777-1855), uno de los matemáticos más brillantes de la historia. A la derecha, Georg Bernhard Riemann (1826-1866), discípulo aventajado del anterior y uno de los padres de la nueva geometría.



ORONOZ



La íntima belleza de las formas

Los fundamentos de la geometría son la base matemática de formas tan evocadoras como el rosetón de la catedral de Chartres o la concha del nautilus (arriba).

● Materia y espacio

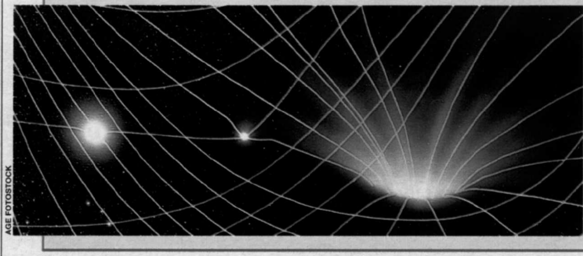
Quizá la frase que resuma mejor la teoría einsteniana es la que aparece en el libro *Gravitation* de los físicos Wheeler, Thorne y Misner: "El espacio dice a la materia cómo debe moverse; la materia dice al espacio cómo debe curvarse". Para visualizar el funcionamiento de la gravedad imaginemos una cama elástica como representación bidimensional del espacio-tiempo en que vivimos. Si no hay nada encima de ella (materia), su forma (geometría) es totalmente plana, sin deformaciones. Supongamos que colocamos en el centro una esfera de hierro maciza (una estrella). La superficie elástica va a deformarse debido a la presencia de masa. Si arrojamos una canica (una sonda espacial, un rayo de luz) hacia ella, veremos que seguirá la pendiente cayendo hacia ella o, si llega algo desviada, describirá una trayectoria curva a su alrededor; estará orbitando en torno a la masa central.

Ésta es la idea básica de la relatividad general: el valor de la curvatura en un punto del espacio es una medida de la gravedad existente en dicho punto. Y a mayor densidad del objeto, mayor curvatura y, por tanto, mayor gravedad.

Y no sólo eso. La misma estructura del universo, su forma, depende de la materia que contiene. El mundo plano de la geometría de Euclides puede no corresponderse con la realidad. Quizá nuestro universo sea como una pelota o tenga forma de silla de montar. ■

Los diferentes universos de la geometría

El quinto postulado de Euclides define un tipo de universo muy específico. El universo plano, que es con el que estamos familiarizados y que en dos dimensiones corresponde a una hoja de papel sobre una mesa. Ahora bien, si el quinto postulado no se cumple pueden ocurrir dos cosas: que no se pueda trazar ninguna paralela por un punto a una recta dada o que se puedan trazar infinitas. En ambos casos, la forma que tiene el espacio es diferente. Para poder visualizarlo debemos restringirnos a un espacio de dos dimensiones (por desgracia no podemos ver el mundo de tres dimensiones desde "arriba"). Entonces, el primer caso da lo que se denomina un universo esférico; el segundo, un universo parabólico, con forma de silla de montar. ●



AGE FOTOSTOCK

En el quinto postulado euclidiano se encierra el misterio de la forma del universo.

PARA SABER MÁS

Las cinco ecuaciones que cambiaron el mundo. Michael Guillén. Debate. Barcelona, 1999.

En Internet

www.muyinteresante.es *En el canal Muy interactivo se recomiendan buenas direcciones sobre matemáticas.*